

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\log_2 7 + \log_2 6 - \log_2 21 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$. Demonstrați că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 12} = 2x$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- 5p** 5. Determinați numerele reale a și b , pentru care $\vec{u} = 3\vec{v}$, unde $\vec{u} = a\vec{i} + 6\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$.
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(x)) = 5$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Determinați numărul natural n astfel încât $A(-3) + A(-2) + A(-1) + A(1) + A(2) + A(3) = nA(0)$.
- 5p** c) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $0 * 1 = 1$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 1$.
- 5p** c) Demonstrați că $x * (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 2x + 2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , ecuația $f(x) = a$ are cel puțin o soluție.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - xe^x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \frac{e^4 - e + 3}{2}$.
- 5p** c) Se consideră $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1) = 0$. Arătați că $\int_0^1 F(x) dx = \frac{5 - 3e}{3}$.